円に内接する四角形の二定理

Ⅰ．円に内接する四角形の面積の公式（ブラーマグプタの公式）

> 円に内接する四角形の 4 辺の長さを a，b，c，d とし，$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とすると，
>
> この四角形の面積 S は，$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

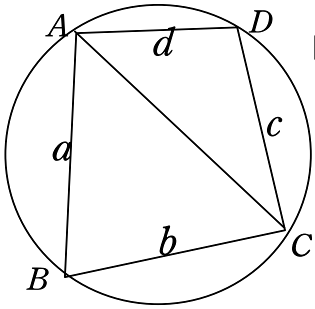

図 1

証明　図 1 で，$D=180°-B$ であるから

$\sin D=\sin(180°-B)=\sin B$，

$2S=2(\triangle ABC+\triangle ACD)=ab\sin B+cd\sin D$

$=(ab+cd)\sin B$

余弦定理より，$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$……①，

$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-B)$，　よって，

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B \iff \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \cdots\cdots (*)$$

ここで，$1-\cos^2 B=\dfrac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}$

$$=\frac{\{2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}}{4(ab+cd)^2}$$

分子 $=\{a^2+b^2+2ab-(c^2+d^2-2cd)\}\{c^2+d^2+2cd-(a^2+b^2-2ab)\}$

$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)$

$=(2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$，　ゆえに，

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{2(ab+cd)}=\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}$$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　となる。　終

解説　三角形の面積の公式である**ヘロンの公式**（$\triangle ABC$ で，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，面積を S としたとき，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ）は，**ブラーマグプタの公式**で $d=0$ としたものである。**三平方の定理**の拡張としての「**余弦定理**」があり，「余弦定理」の証明には三平方の定理が使われるが，結果は「三平方の定理」を含んだものとなっている。同様に，「ヘロンの公式」と同じ証明過程をたどる「ブラーマグプタの公式」は「ヘロンの公式」を含むことになった。

山脇の超数学講座 No. 63

Ⅱ．円に内接する四角形のトレミーの定理

四角形 $ABCD$ が円に内接する　$\Leftrightarrow$　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$

証明　（図 2 でいうと，$ac+bd=ef$ と簡潔に表せる）

Ⅰ(ブラーマグプタの公式）の証明の (∗) までは同じとする。

$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$，　これを①に代入して，

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\times\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$

$$=\frac{ab(a^2+b^2)+cd(a^2+b^2)-ab(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

$$=\frac{cda^2+b(c^2+d^2)a+b^2cd}{ab+cd}$$

c d ⤫ $bd \to bd^2$，$bc \to bc^2$

$$=\frac{(ca+bd)(da+bc)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\ \cdots\cdots②$$

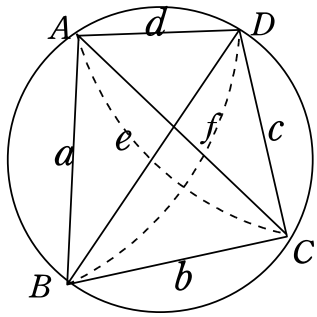

図 2

同様に，図 2 で，対称性を利用して，　$BD^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\ \cdots\cdots③$

②×③ によって，$AC^2\cdot BD^2=(ac+bd)^2$，$ac+bd>0$，$AC>0$，$BD>0$ だから，

$ac+bd=AC\cdot BD$，　もとに戻して　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$　終

解説　円に内接する四角形，二つ目の定理は「**トレミーの定理**」である。トレミー（83年頃～168年頃）は古代ローマ時代の数学者，ブラ―マグプタ（598～665）はインドの数学者で，両者は天文学者としても有名である。トレミーは正確な三角比の表（正弦）を作成しており，インドでは《アールヤバティーヤ》(499)という書で「三角関数表」が登場していて，ともに天文学と三角関数利用の伝統があった。「トレミーの定理」を概念でいうと，「**円に内接する四角形の，対辺の長さの積の和は，対角線の長さの積に等しい**」というもので，美しい方程式となっている。証明には，余弦定理と「対称性」が使われている。　a，b，c，d の 4 つの文字で，それぞれ 2 つずつの 2 グループをつくる方法は，${}_4C_2\div 2=3$（通り）ある。それぞれを積にして和をつくれば，$ab+cd$，$ac+bd$，$ad+bc\cdots$(∗∗) となる。②において，(∗∗) のグループと 対角線AC の位置関係がわかれば，対角線BDを求める式③が導き出せる。これが「**対称性**」である。「ブラ―マグプタ公式」でも，求める過程で a，b，c，d の対称性，循環性に気づく。二つの公式･定理が，三角比･余弦定理で結び付けられるのは歴史の必然だ。